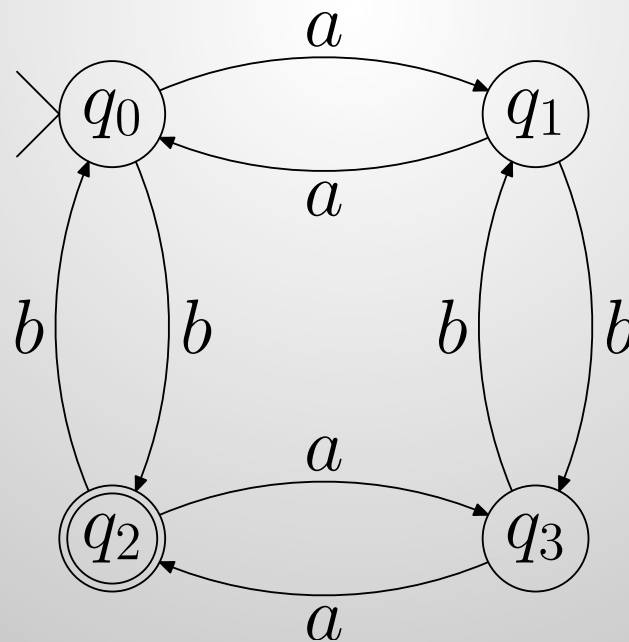


Computer Science 121

Formal Systems and Computation

- **Two ways to look at it**
 1. **Study of problems and computers with all their physicality abstracted away**



Computer Science 121

Formal Systems and Computation

- **Two ways to look at it**
 1. **Study of problems and computers with all their physicality abstracted away ... yielding all kinds of neat puzzles with important practical applications!**

Computer Science 121

Formal Systems and Computation

- **Two ways to look at it**
 1. *Study of problems and computers with all their physicality abstracted away ... yielding all kinds of neat puzzles with important practical applications!*
 2. **The science of computing is older than computers**



Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900.

Von D. HILBERT in Göttingen.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1900. Heft 3. Mit Zusätzen des Verfassers.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? Welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwicklung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der mutmaßlichen Entwicklung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passieren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht bloß auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekanntes Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO
THE ENTSCHIEDUNGSPROBLEM

By A. M. TURING.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

The “computable” numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means. Although the subject of this paper is ostensibly the computable *numbers*, it is almost equally easy to define and investigate computable functions of an integral variable or a real or computable variable, computable predicates, and so forth. The fundamental problems involved are, however, the same in each case, and I have chosen the computable numbers for explicit treatment as involving the least cumbersome technique. I hope shortly to give an account of the relations of the computable numbers, functions, and so forth to one another. This will include a development of the theory of functions of a real variable expressed in terms of computable numbers. According to my definition, a number is computable if its decimal can be written down by a machine.

In §§ 9, 10 I give some arguments with the intention of showing that the computable numbers include all numbers which could naturally be regarded as computable. In particular, I show that certain large classes of numbers are computable. They include, for instance, the real parts of all algebraic numbers, the real parts of the zeros of the Bessel functions, the numbers π , e , etc. The computable numbers do not, however, include all definable numbers, and an example is given of a definable number which is not computable.

Although the class of computable numbers is so great, and in many ways similar to the class of real numbers, it is nevertheless enumerable. In § 8 I examine certain arguments which would seem to prove the contrary. By the correct application of one of these arguments, conclusions are reached which are superficially similar to those of Gödel†. These results

† Gödel, “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I”, *Monatshefte Math. Phys.*, 38 (1931), 173–198.

Computer Science 121

Formal Systems and Computation

- **Two ways to look at it**
 1. *Study of problems and computers with all their physicality abstracted away ... yielding all kinds of neat puzzles with important practical applications!*
 2. **The science of computing is older than computers ... and in CS121 you can see the process of creating a science!**